MACHINE A VIBRER LE BETON - Corrigé

Q1. Déterminer la vitesse et l'accélération du point G_2, centre de gravité de l'ensemble 2, par rapport au repère R_0.

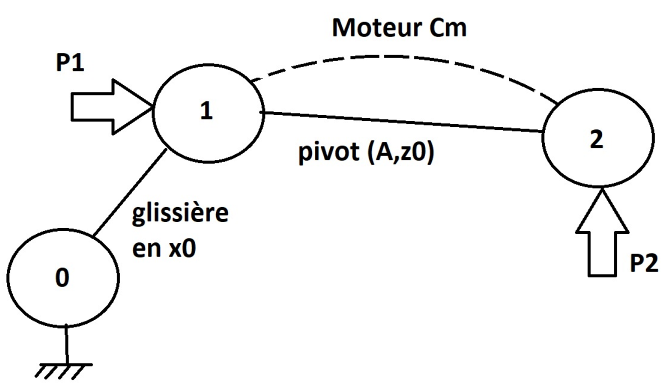
$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{V_{G2,2/0}} &= \overrightarrow{V_{A,2/0}} + \overrightarrow{G_2A} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/0}} \\
&= [\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}]_{R0} + \underbrace{''A \in 2''}_{vrai} - c.\overrightarrow{x_2} \wedge \dot{\alpha}.\overrightarrow{z_0} \\
&= \dot{x}(t).\overrightarrow{x_0} + c.\dot{\alpha}.\overrightarrow{y_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{a_{G2,2/0}} &= [\frac{d\overrightarrow{V_{G2,2/0}}}{dt}]_{R0} \\
&= [\frac{d(\dot{x}(t).\overrightarrow{x_0} + c.\dot{\alpha}.\overrightarrow{y_2})}{dt}]_{R0} \\
&= \ddot{x}(t).\overrightarrow{x_0} + c.\ddot{\alpha}.\overrightarrow{y_2} + c.\dot{\alpha}.[\frac{d\overrightarrow{y_2}}{dt}]_{R0} \\
&= \ddot{x}(t).\overrightarrow{x_0} + c.\ddot{\alpha}.\overrightarrow{y_2} + c.\dot{\alpha}.\overrightarrow{\Omega_{2/0}} \wedge \overrightarrow{y_2} \\
&= \ddot{x}(t).\overrightarrow{x_0} + c.\ddot{\alpha}.\overrightarrow{y_2} + c.\dot{\alpha}^2.\overrightarrow{x_2}
\end{aligned}
$$

Q2. Justifier la forme de la matrice d'inertie de l'ensemble 2.

L'ensemble 2 présente deux plans de symétrie, suivant le plan $(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{z_0})$ et le plan $(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2})$.

Q3. Tracer le graphe de structure du mécanisme et établir l'inventaire des efforts sur 1 et 2.



Q4. Déterminer le torseur Dynamique de l'ensemble {1+2} au point G_2.

$$\{\mathbb{D}_{1+2/0}\} = \{\mathbb{D}_{2/0}\} + \{\mathbb{D}_{1/0}\}$$

Or :

$$\{\mathbb{D}_{2/0}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{d,2/0}} = M_2.\overrightarrow{a_{G2,2/0}} \\ \overrightarrow{\delta_{G2,2/0}} = [\frac{d\overrightarrow{\sigma_{G2,2/0}}}{dt}]_{R0} \end{array} \right\}_{(G2,R0)}$$

Avec : $\overrightarrow{\sigma_{G2,2/0}} = I_{G2}(2).\overrightarrow{\Omega_{2/0}}$

Or nous connaissons $I_A(2)$, qu'il faut donc déplacer en G_2.

Appliquons le **théorème de Huygens**, avec $\overrightarrow{AG_2} = c.\overrightarrow{x_2}$:

$$I_A(2) = I_{G2}(2) + I_A(M_2 \rightarrow G_2)$$

$$\begin{aligned} I_{G2}(2) &= I_A(2) - I_A(M_2 \rightarrow G_2) \\ &= \begin{bmatrix} I_{Ax} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Ay} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Az} \end{bmatrix}_{B_2} - M_2. \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{bmatrix}_{B_2} \\ &= \begin{bmatrix} I_{Ax} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Ay} - M_2.c^2 & 0 \\ 0 & 0 & I_{Az} - M_2.c^2 \end{bmatrix}_{B_2} \end{aligned}$$

D'où :

$$\overrightarrow{\sigma_{G2,2/0}} = \begin{bmatrix} I_{Ax} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Ay} - M_2.c^2 & 0 \\ 0 & 0 & I_{Az} - M_2.c^2 \end{bmatrix}_{B_2} .\dot{\alpha}.\overrightarrow{z_0} = (I_{Az} - M_2.c^2).\dot{\alpha}.\overrightarrow{z_0}$$

Donc :

$$\overrightarrow{\delta_{G2,2/0}} = (I_{Az} - M_2.c^2).\ddot{\alpha}.\overrightarrow{z_0}$$

Donc :

$$\{\mathbb{D}_{2/0}\} = \left\{ \begin{array}{c} M_2.(\ddot{x}(t).\overrightarrow{x_0} + c.\ddot{\alpha}(t).\overrightarrow{y_2} - c.\dot{\alpha}^2(t).\overrightarrow{x_2}) \\ (I_{Az} - M_2.c^2).\ddot{\alpha}.\overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_{(G2)}$$

Maintenant, déterminons $\{\mathbb{D}_{1/0}\}$:

Nous savons que le solide 1 est en translation d'axe $\overrightarrow{x_0}$ par rapport au solide 0.

$$\{\mathbb{D}_{1/0}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{d,1/0}} = M_1.\overrightarrow{a_{G2,1/0}} = M_1.\ddot{x}(t).\overrightarrow{x_0} \\ \overrightarrow{\delta_{G2,1/0}} = \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{(G2,R0)}$$

Donc :

$$\{\mathbb{D}_{1+2/0}\} = \left\{ \begin{array}{c} M_1.\ddot{x}(t).\overrightarrow{x_0} + M_2.(\ddot{x}(t).\overrightarrow{x_0} + c.\ddot{\alpha}(t).\overrightarrow{y_2} - c.\dot{\alpha}^2(t).\overrightarrow{x_2}) \\ (I_{Az} - M_2.c^2).\ddot{\alpha}(t).\overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_{(G2,R0)}$$

Q5. Appliquer le Théorème de la Résultante Dynamique sur l'ensemble $\{1+2\}$ au point G_2. En déduire l'équation de mouvement $\ddot{x}(t) = f(M_1, M_2, c, \omega, \dot{\omega}, t, \alpha)$.

On isole les solides **1** et **2**. Le Bilan des Actions Mécaniques Extérieures donne :

- Poids du solide **1** en G_1 : $\overrightarrow{P_1} = -M_1.\overrightarrow{g}.\overrightarrow{y_0}$.
- Poids du solide **2** en G_2 : $\overrightarrow{P_2} = -M_2.\overrightarrow{g}.\overrightarrow{y_0}$.
- Liaison glissière d'axe $\overrightarrow{x_0}$ entre le solide **0** et le solide **1**, noté $\overrightarrow{F_{01}} = Y_{01}.\overrightarrow{y_0}$ puisque le problème est plan.

Le Théorème de la Résultante Dynamique donne :

$$-M_1.\overrightarrow{g}.\overrightarrow{y_0} - M_2.\overrightarrow{g}.\overrightarrow{y_0} + Y_{01}.\overrightarrow{y_0} = M_1.\ddot{x}(t).\overrightarrow{x_0} + M_2.(\ddot{x}(t).\overrightarrow{x_0} + c.\ddot{\alpha}(t).\overrightarrow{y_2} - c.\dot{\alpha}^2(t).\overrightarrow{x_2})$$

Or :
$\overrightarrow{x_2} = \cos\alpha(t).\overrightarrow{x_0} + \sin\alpha(t).\overrightarrow{y_0}$
$\overrightarrow{y_2} = \cos\alpha(t).\overrightarrow{y_0} - \sin\alpha(t).\overrightarrow{x_0}$
Donc, le TRD en projection sur l'axe $\overrightarrow{x_0}$ donne :

$$(M_1 + M_2).\ddot{x}(t) - M_2.c(\ddot{\alpha}(t).\sin\alpha(t) + \dot{\alpha}^2(t).\cos\alpha(t)) = 0$$

Donc :

$$\ddot{x}(t) = \frac{M_2.c}{M_1 + M_2}.(\dot{\omega}(t).\sin\alpha(t) + \omega^2(t).\cos\alpha(t))$$

On cherche maintenant à exprimer le couple moteur C_m.

Q6. Isoler l'ensemble 2, établir le bilan des actions mécaniques extérieures, sous forme de torseur, au point G_2.

On isole le solide **2**. Le BAME donne :

→ Poids $\overrightarrow{P_2}$ en G_2 :

$$\{\mathbb{T}_{pes2}\} = \left\{ \begin{array}{c} -M_2.g.\overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{G2}$$

→ Pivot de 1 → 2 en A avec couple moteur $\overrightarrow{C_m}$:

$$\{\mathbb{T}_{1\to2}\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{12}.\overrightarrow{x_2} + Y_{12}.\overrightarrow{y_2} \\ C_m.\overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} X_{12}.\overrightarrow{x_2} + Y_{12}.\overrightarrow{y_2} \\ (C_m - c.Y_{12}).\overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_{G2}$$

Transportons ce second torseur au point G_2 :

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{M_{G2}}(\overrightarrow{F_{12}}) & = & C_m.\overrightarrow{z_0} + \overrightarrow{G_2A} \wedge (X_{12}.\overrightarrow{x_0} + Y_{12}.\overrightarrow{y_0}) \\ & = & C_m.\overrightarrow{z_0} - c.\overrightarrow{x_2} \wedge (X_{12}.\overrightarrow{x_2} + Y_{12}.\overrightarrow{y_2}) \\ & = & C_m.\overrightarrow{z_0} - c.Y_{12}.\overrightarrow{z_0} \end{array}$$

Q7. Montrer que le moment dynamique $\overrightarrow{\delta(G_2, S_2/S_1)} = \overrightarrow{\delta(G_2, S_2/R_0)}$. En déduire le torseur Dynamique de l'ensemble $\{2\}$ par rapport à l'ensemble 1.

$$\overrightarrow{\delta_{G2,2/1}} = [\frac{d\overrightarrow{\sigma_{G2,2/1}}}{dt}]_{R1}$$

Or :

$$\overrightarrow{\sigma_{G2,2/1}} = I_{G2}(2).\overrightarrow{\Omega_{2/1}}$$

Et :

$$\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \underbrace{\overrightarrow{\Omega_{1/0}}}_{=\overrightarrow{0}} = \overrightarrow{\Omega_{2/1}}$$

Donc :

$$\overrightarrow{\sigma_{G2,2/1}} = I_{G2}(2).\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \overrightarrow{\sigma_{G2,2/0}}$$

Donc :

$$\overrightarrow{\delta_{G2,2/1}} = [\frac{d((I_{Az} - M_2.c^2).\dot{\alpha}.\overrightarrow{z_0})}{dt}]_{R1} = (I_{Az} - M_2.c^2).\ddot{\alpha}.\overrightarrow{z_0} + (I_{Az} - M_2.c^2).\overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \dot{\alpha}.\overrightarrow{z_0}$$

$$\overrightarrow{\delta_{G2,2/1}} = (I_{Az} - M_2.c^2).\ddot{\alpha}(t).\overrightarrow{z_0} = \overrightarrow{\delta_{G2,2/0}}$$

$$\{\mathbb{D}_{2/1}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{Rd_{G2,2/1}} = M_2.\overrightarrow{a_{G2,2/1}} \\ \overrightarrow{\delta_{G2,2/1}} = (I_{Az} - M_2.c^2).\ddot{\alpha}(t).\overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_{(G2)}$$

Or :

$$\overrightarrow{Rd_{G2,2/1}} = M_2.c(\ddot{\alpha}.\overrightarrow{y_2} - c.\dot{\alpha}^2.\overrightarrow{x_2})$$

Q8. Appliquer le PFD, et en déduire les inconnues de liaison de la pivot entre les ensembles 1 et 2, ainsi que l'expression du couple moteur C_m du stator sur le rotor, en fonction de $M_1, M_2, g, \dot{\omega}, c, t$ et des composantes utiles issues de la matrice d'inertie de l'ensemble 2.

Le Principe Fondamental de la Dynamique s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{c} -M_2.g.(\cos\alpha(t).\overrightarrow{y_2} + \sin\alpha(t).\overrightarrow{x_2}) \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{G2} + \left\{ \begin{array}{c} X_{12}.\overrightarrow{x_2} + Y_{12}.\overrightarrow{y_2} \\ (C_m - c.Y_{12}).\overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_{G2} = \left\{ \begin{array}{c} M_2.c(\ddot{\alpha}.\overrightarrow{y_2} - c.\dot{\alpha}^2.\overrightarrow{x_2}) \\ (I_{Az} - M_2.c^2).\ddot{\alpha}(t).\overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_{G2}$$

On obtient 3 équations :

(1) $-M_2.g.\sin\alpha(t) + X_{12} = -M_2.c.\dot{\alpha}^2$

(2) $-M_2.g.\cos\alpha(t) + Y_{12} = M_2.c.\ddot{\alpha}$

(3) $C_m(t) - c.Y_{12} = (I_{Az} - M_2.c^2).\ddot{\alpha}(t)$

Donc :

$X_{12} = -M_2.c.\dot{\alpha}^2 + M_2.g.\sin\alpha(t)$

$Y_{12} = M_2.c.\ddot{\alpha} + M_2.g.\cos\alpha(t)$

$C_m(t) = (I_{Az} - M_2.c^2).\ddot{\alpha}(t) + M_2.c.\ddot{\alpha} + M_2.g.\cos\alpha(t) = (I_{Az} - M_2.c^2).\dot{\omega}(t) + M_2.c.\dot{\omega}(t) + M_2.g.\cos\alpha(t)$