MACHINE A VIBRER LE BETON

Les modèles ci-dessous représentent schématiquement une machine à vibrer des éléments préfabriqués en béton. Un châssis sur roues est solidaire du moule et du stator d'un moteur électrique destiné à générer les vibrations.

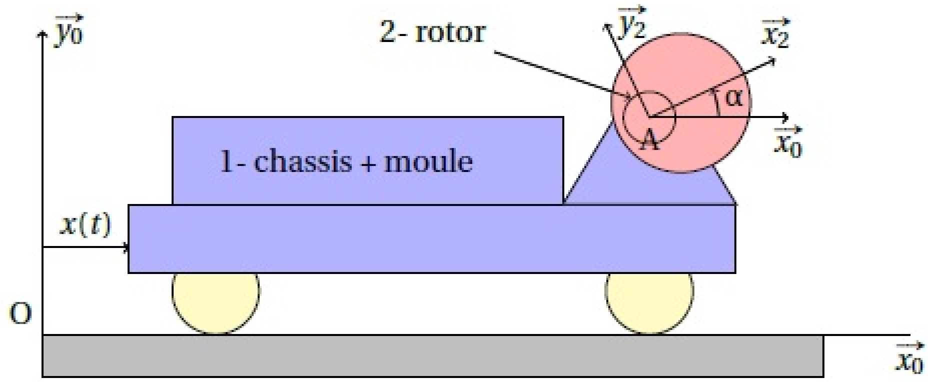
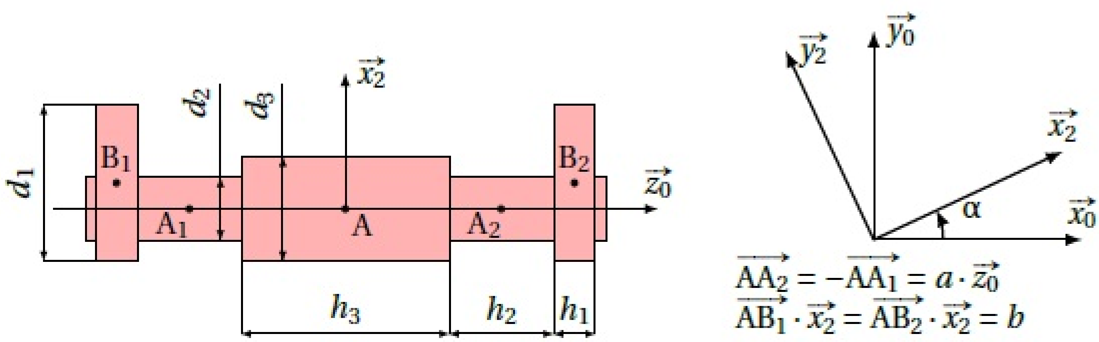


FIGURE 1.8 – Machine à vibrer le béton - modélisation



(a) Rotor (b) Paramétrage

L'ensemble 1, de masse M_1, en translation comprend la plate-forme, le moule, le béton et le stator du moteur électrique. Sa position par rapport au repère R_0 galiléen est définie par $x(t)$. La liaison équivalente par rapport au sol est une glissière de direction $\vec{x_0}$.

L'ensemble 2, de masse M_2, tournant par rapport à 1 autour de l'axe $(A, \vec{z_0})$, comporte le rotor du moteur, son arbre et deux disques excentrées. On note :

- $\omega(t) = \frac{d\alpha(t)}{dt}$ la vitesse de rotation constante de l'ensemble 2.
- G_2 le centre d'inertie du solide 2 avec $\overrightarrow{AG_2} = c.\vec{x_2}$.
- La matrice d'inertie de l'ensemble 2 s'écrit en A dans la base $B_2 = (\vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z_2})$:

$$I_{(A,2)} = \begin{bmatrix} I_{Ax} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Ay} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Az} \end{bmatrix}_{A,B_2}$$

Les roues sont en liaison pivot, sans frottement, par rapport à 1. La masse et l'inertie des roues sont négligeables.
Le moteur applique sur le rotor un couple noté $\vec{C_m} = C_m.\vec{z_0}$.
Le plan $(A, \vec{x_0}, \vec{y_0})$ est plan de symétrie du système.

Q1. Déterminer la vitesse et l'accélération du point G_2, centre de gravité de l'ensemble 2, par rapport au repère R_0.

On modélise l'ensemble 2 par :
— Un cylindre de diamètre d_3, de hauteur h_3 et de masse volumique ρ_3 pour le rotor du moteur.
— Deux disques centrés respectivement en B_1 et B_2 de diamètre d_1, de hauteur h_1, de masse volumique ρ_1.
— Deux arbres cylindriques centrés respectivement en A_1 et A_2 de diamètre d_2, de hauteur h_2 et de masse volumique ρ_1 reliant le rotor aux disques.
— Les trois cylindres sont d'axe $\overrightarrow{z_0}$.

Q2. Justifier la forme de la matrice d'inertie de l'ensemble 2.

On souhaite déterminer $\ddot{x}(t) = f(M_1, M_2, c, \omega, \dot{\omega}, t, \alpha)$, l'équation du mouvement de l'ensemble 1, par rapport au repère R_0. Pour cela :

Q3. Tracer le graphe de structure du mécanisme et établir l'inventaire des efforts sur 1 et 2.

Q4. Déterminer le torseur Dynamique de l'ensemble $\{1+2\}$ au point G_2.

Q5. Appliquer le Théorème de la Résultante Dynamique sur l'ensemble $\{1+2\}$ au point G_2. En déduire l'équation de mouvement $\ddot{x}(t) = f(M_1, M_2, c, \omega, \dot{\omega}, t, \alpha)$.

On cherche maintenant à exprimer le couple moteur C_m.

Q6. Isoler l'ensemble 2, établir le bilan des actions mécaniques extérieures, sous forme de torseur, au point G_2.

Q7. Montrer que le moment dynamique $\overrightarrow{\delta(G_2, S_2/S_1)} = \overrightarrow{\delta(G_2, S_2/R_0)}$. En déduire le torseur Dynamique de l'ensemble $\{2\}$ par rapport à l'ensemble 1.

Q8. Appliquer le PFD, et en déduire les inconnues de liaison de la pivot entre les ensembles 1 et 2, ainsi que l'expression du couple moteur C_m du stator sur le rotor, en fonction de $M_1, M_2, g, \dot{\omega}, c, t$ et des composantes utiles issues de la matrice d'inertie de l'ensemble 2.